Capitolo 1

Elementi di Didattica della Matematica

1. Insegnare la matematica oggi.

Perché oggi viene data tanta importanza all'insegnamento scientifico e della Matematica in particolare? Alla fine degli anni 50 del secolo scorso (50 anni fa) un evento scientifico e tecnico molto importante mise in allarme il mondo occidentale. Allora era molto forte la contrapposizione tra blocchi, USA e loro alleati da una parte, Unione Sovietica e loro alleati dall'altra. Il 4 ottobre 1957 l'Unione Sovietica lancia nello spazio il primo satellite artificiale, lo Sputnik. Per gli USA lo shock fu forte e si cominciò a parlare esplicitamente della necessità di migliorare l'insegnamento scientifico per poter far fronte meglio allo sviluppo tecnologico che in quella vicenda era legato fortemente al problema della sicurezza del paese (si pensava prima di tutto alle possibili applicazioni militari). Cominciarono così a partire programmi per il miglioramento dell'insegnamento scientifico e della Matematica in particolare sia in America che in Europa. In Italia nel 1962 diventa obbligatoria la Scuola Media (attuale Secondaria Inferiore), nel 1979 si rinnovano i suoi programmi e nel 1985 si rinnovano quelli della Scuola Elementare (attuale Scuola Primaria). Per quanto riguarda la Matematica, si afferma esplicitamente il ruolo fondamentale che questa disciplina ha nella scuola dell'obbligo:

… l'insegnamento della matematica si propone di:

- *suscitare un interesse che stimoli le capacità intuitive degli alunni;*
- *condurre gradualmente a verificare la validità delle intuizioni e delle congetture con ragionamenti via via più organizzati;*
- *sollecitare ad esprimersi e comunicare in un linguaggio che, pur conservando piena spontaneità, diventi sempre più chiaro e preciso, avvalendosi*

anche di simboli, rappresentazioni grafiche, ecc. che facilitino l'organizzazione del pensiero;

- *guidare alla capacità di progressiva chiarificazione dei concetti e facendo riconoscere analogie in situazioni diverse, così da giungere a una visione unitaria su alcune idee centrali (variabile, funzione, trasformazione, struttura ...);*
- *avviare alla consapevolezza e alla padronanza del calcolo.*

(programmi della Scuola Media del 1979)

L'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentita. Essa tende a sviluppare, in modo specifico, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla criticamente e per intervenire consapevolmente su di essa.

L'insegnamento della matematica nella scuola elementare è stato per lungo tempo condizionato dalla necessità di fornire precocemente al fanciullo strumenti indispensabili per le attività pratiche. Con il dilatarsi della istruzione si è avuta la possibilità di puntare più decisamente verso obiettivi di carattere formativo.

(programmi della Scuola Elementare del 1985)

Anche gli ultimi interventi (2003 e 2007) insistono su questa impostazione:

la scuola primaria promuove, nel rispetto delle diversità individuali, lo sviluppo della personalità, ed ha il fine di far acquisire e sviluppare le conoscenze e le abilità di base fino alle prime sistemazioni logico-critiche, di far apprendere i mezzi espressivi, …. , di porre le basi per l'utilizzazione di metodologie scientifiche nello studio del mondo naturale, dei suoi fenomeni e delle sue leggi, di valorizzare le capacità relazionali e di orientamento nello spazio e nel tempo.

(Legge 53 del 18 marzo 2003)

Le conoscenze matematiche, scientifiche e tecnologiche contribuiscono in modo determinante alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il "pensare" e il "fare" e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani. I principi e le pratiche delle scienze, della matematica e delle tecnologie sviluppano infatti le capacità di critica e di giudizio, la consapevolezza che occorre motivare le proprie affermazioni, l'attitudine ad ascoltare, comprendere e valorizzare argomentazioni e punti di vista diversi dai propri. Lo sviluppo di un'adeguata competenza scientifica, matematica, tecnologica di base consente inoltre di leggere e valutare le informazioni che la società di oggi offre in grande abbondanza. In questo modo consente di esercitare la propria cittadinanza attraverso decisioni motivate, intessendo relazioni costruttive fra le tradizioni culturali e i nuovi sviluppi delle conoscenze.

….. la matematica ha uno specifico ruolo nello sviluppo della capacità generale di operare e comunicare significati con linguaggi formalizzati e di utilizzare tali linguaggi per rappresentare e costruire modelli di relazioni fra oggetti ed eventi. In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; inoltre contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri.
(DM Fioroni - 31 luglio 2007)

Queste enunciazioni di principi generali di solito trovano tutti d'accordo: chiunque, parlando dell'insegnamento della matematica, dirà che bisogna partire dalla realtà, dal concreto, che la matematica serve a sviluppare il ragionamento, che la matematica insegna ad essere precisi e rigorosi, ecc.

Quando però si tratta di tradurre queste cose nella pratica dell'insegnamento capita spessissimo che si cada sempre nei soliti errori, riproducendo una metodologia di insegnamento che è molto simile a quella che abbiamo subito da allievi e che spesso è in netto contrasto con le enunciazioni di principio. Purtroppo ci sono ancora tantissimi insegnanti, anche di scuola primaria, che concepiscono l'insegnamento della matematica secondo lo schema "spiegazione – esercitazione – verifica", insegnanti per i quali il "concreto" vuol dire *parlare* di mele, caramelle, bambini, usare disegni invece di oggetti, utilizzare esempi che non fanno parte del vissuto dei bambini, soprattutto che non utilizzano una pratica didattica che parta sempre dal fare.

Ecco allora che le indicazioni ministeriali pongono fortissimamente l'accento sulla necessità di usare il laboratorio, inteso non tanto come un luogo deputato e organizzato per fare esperienze ma soprattutto come una indispensabile pratica didattica: bisogna fare esperienze, imparare a descrivere quello che si è visto, comprendere le descrizioni degli altri, confrontare i propri punti di vista con quelli dei compagni, fare congetture e verificarne la validità, porsi problemi.

Se la matematica diventa un insieme di concetti, termini, regole allora è molto probabile che per la maggior parte degli allievi diventi una materia priva di senso, della quale è difficile capire le motivazioni. Invece tutti i concetti matematici nascono da problemi, quindi hanno una forte motivazione, in questo contesto le regole, le formule assumono il significato di strumenti di semplificazione del pensiero, non imposti dall'insegnante ma conquistati con naturalezza dagli allievi. Per fare ciò non bisogna partire dalle teorie ma da contesti vicini alle esperienze dei bambini, porre problemi nei quali si sentano coinvolti, aiutarli a trovare strategie di soluzione che consentano loro di acquisire nuova conoscenza.

In questo processo è fondamentale il ruolo dell'insegnante, che deve saper scegliere argomenti e situazioni problematiche interessanti per i bambini, che deve saperli guidare nella scoperta, che deve favorire la crescita culturale aiutandoli a riflettere su quello che fanno e su come lo fanno, a saper giudicare l'efficacia o meno delle scelte fatte.

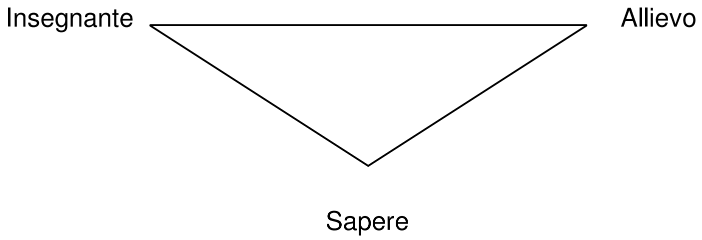
Si comprende allora come sia fondamentale il metodo didattico che va usato: è fondamentale innovare l'insegnamento della matematica, capire che la matematica è un elemento essenziale della cultura, che oggi non si può essere cittadini consapevoli se non si è in possesso di adeguati strumenti di pensiero che la matematica è in grado di fornire fin dai primi anni della formazione dell'individuo.

La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un'acquisizione graduale del linguaggio specifico. Per questo motivo i traguardi per la terza classe della scuola secondaria di primo grado sono presentati come un'evoluzione di quelli per la quinta classe della scuola primaria e gli obiettivi per ciascun livello comprendono in ogni caso anche quelli del livello precedente, naturalmente intesi con un grado maggiore di complessità delle situazioni considerate e di padronanza da parte dell'alunno.

Alla luce di ciò è fondamentale che l'insegnante non abbia fretta: i cinque anni della scuola primaria sono lunghi e sono sicuramente sufficienti per fare in modo che i bambini acquisiscano le nozioni e le abilità che sono richieste per la loro maturazione e per il proseguimento degli studi, la cosa però più importante di tutto è dare loro un metodo di lavoro che sia scientifico, che sappia sempre partire dall'osservazione e dalla riflessione per sviluppare in maniera adeguata ragionamenti che portino a soluzioni logiche, corrette e quindi condivisibili.

2. Il Sistema didattico.

Guardiamo più da vicino a quello che avviene in una classe. Il termine *Sistema didattico*, usato dai ricercatori, indica l'insieme formato da insegnante, allievo e dalle conoscenze di una certa disciplina che l'insegnante ha lo scopo di far apprendere all'allievo. Un semplice schema che può rappresentare il Sistema didattico è un triangolo ai cui vertici sono collocati l'insegnante, l'allievo, il sapere.



Questo schema va considerato come un riferimento ai tre soggetti che entrano in contatto tra loro al momento dell'azione didattica e interagiscono fortemente. Bisogna subito chiarire il significato della parola *sapere*: in generale per *sapere* bisogna intendere il sapere consolidato, accademico, nel caso della Matematica il sapere dei matematici. Questo sapere non è quello che entra nel rapporto tra insegnante e allievo: dal sapere accademico, l'insegnante deve passare al sapere adatto per i suoi allievi (per schematizzare, questo viene chiamato *"sapere insegnato"*).

Facciamo l'esempio della geometria. Per i matematici la geometria comprende tantissime cose: sicuramente la geometria di Euclide, quella piana e quella solida, ma anche la geometria proiettiva, le geometrie non euclidee, la geometria algebrica, la geometria analitica, la geometria differenziale, ecc. Vediamo che cosa è nella scuola dell'infanzia e nella scuola primaria il sapere insegnato relativo alla geometria. Si parte dall'osservazione dello spazio cercando di consolidare prima di tutto i rapporti topologici cioè si cerca di far acquisire le nozioni che esprimono le relazioni reciproche degli oggetti e quelle del soggetto rispetto agli oggetti: sopra – sotto, avanti – indietro, a destra – a sinistra, dentro – fuori, ecc. Contestualmente c’è il riconoscimento delle forme con le prime classificazioni, rotondo, quadrato, triangolare, ecc. e ancora il riconoscimento di altri attributi (per esempio sottile, spesso, alto, basso, largo, stretto, ecc.). Ad un certo punto nasce poi la necessità di utilizzare i concetti di linea, di punto, di angolo e così via.

Certamente non è pensabile utilizzare l’impostazione assiomatica della geometria euclidea con i bambini o anche con i ragazzi degli ultimi anni dell’obbligo scolastico, ma è necessario adattare questo tipo di sapere alle capacità e alle conoscenze degli allievi.

Questo adattamento è uno dei compiti più importanti attribuiti all'insegnante e viene chiamato *trasposizione didattica*. Essa è il lavoro di trasformazione del sapere accademico in oggetto di insegnamento, in funzione del luogo, dei soggetti a cui ci si rivolge, delle finalità didattiche che ci si pone. In realtà il passaggio dal sapere accademico al sapere insegnato non è diretto ma passa attraverso un'altra fase, che chiameremo il *sapere da insegnare*.

Quest'ultimo tipo di sapere è quello che viene fornito dai programmi di studio: con la trasposizione didattica l'insegnante adatta il sapere da insegnare alla sua classe. Ovviamente non ci può essere una regola generale valida in tutti i contesti: noi dobbiamo interagire con i nostri allievi, guidare ma lasciarci guidare dalle loro domande, dalle loro osservazioni, dalle eventuali idee sbagliate che hanno per cercare di capire in che modo stanno costruendo le loro conoscenze. Il nostro intervento deve essere mirato a correggere i loro percorsi laddove è necessario, a indicare le strade corrette, a sostenerli nelle loro scoperte.

Per comprendere i problemi che ci sono dietro la trasposizione didattica, osserviamo prima di tutto il modo in cui si costruisce il sapere matematico.

Il ricercatore parte da un certo contesto: egli deve risolvere un problema e sulla base delle conoscenze che ha comincia a fare ipotesi, a impostare tentativi di soluzione. Le strade che egli tenta di percorrere quasi mai portano direttamente alla soluzione, capita spesso che bisogna tornare indietro, correggere errori, notare che certe supposizioni non sono valide: si riparte da capo e talvolta alla fine si riesce trovare una soluzione. C'è ora la necessità di rendere noto a tutti il risultato ottenuto. Per fare questo il ricercatore non fa la storia dei suoi tentativi ma racconta a tutti solo il cammino corretto. Egli è portato a decontestualizzare il suo lavoro. Altre volte la costruzione di un nuovo concetto non è altro che un modo per generalizzare (ancora una volta si decontestualizza) un significato o un procedimento.

L'insegnante si trova a disposizione un sapere che è staccato dal contesto nel quale è stato prodotto e deve trasformare in qualche modo questo sapere in sapere insegnato.

Questo lavoro è fortemente influenzato dalle concezioni epistemologiche che egli ha intorno alla matematica: se l'insegnante pensa che la matematica sia solo un insieme di formule, il suo insegnamento sarà di tipo essenzialmente descrittivo e naturalmente questa sarà l'idea di matematica che si faranno i suoi allievi.

Se invece pensa che la matematica sia uno strumento per indagare e descrivere la realtà, sarà molto attento a mettere in risalto aspetti costruttivi della matematica, partendo da problemi e facendo scaturire concetti e procedimenti dalla necessità di avere strumenti per risolverli.

Spesso queste concezioni non sono esplicite, ma adottate dall'insegnante senza una effettiva riflessione su di esse. Noi abbiamo l'idea della Matematica che ci siamo costruiti nel corso delle nostre esperienze che sono perlopiù quelle scolastiche: grandissima importanza ha avuto in questo il tipo di insegnante che ci siamo trovati davanti, che con i suoi comportamenti e con la sua idea della Matematica ha contribuito in maniera determinante al successo, ma molto più spesso all'insuccesso in Matematica.

Dunque la concezione della Matematica che ha l'insegnante (lato insegnante-sapere del triangolo "sistema didattico") ha influenza anche sul lato insegnante-allievo.

Ogni insegnante si pone come obiettivo il bene dei suoi allievi, che è quello che essi apprendano quello che viene loro insegnato. Bisogna però essere coscienti del fatto che la responsabilità dell'apprendimento ricade tutta intera sull'allievo: egli deve "voler" apprendere, nulla può un insegnante nei confronti di un allievo che abbia deciso di non voler imparare. Allora il compito fondamentale dell'insegnante (sul lato insegnante - allievo) è quello di creare le condizioni per cui l'allievo sia interessato ad apprendere. Di conseguenza l'insegnante deve essere molto interessato allo studio delle condizioni nelle quali si forma il sapere: è molto importante la situazione che si crea nella classe ed il modo in cui l'insegnante è in grado di gestirla. Nasce così l'interesse di molti studiosi ad una teoria delle situazioni didattiche:

"una situazione didattica è un insieme di relazioni esplicitamente e/o implicitamente stabilite tra un allievo o un gruppo di allievi, qualche elemento del contorno incluso strumenti o materiali e l'insegnante al fine di permettere agli allievi di apprendere (ricostruire) qualche conoscenza."

L'allievo costruisce conoscenza solo se si interessa personalmente del problema ed è in grado di trovare una soluzione di quanto gli è stato proposto attraverso la situazione didattica. Secondo Brousseau [1986] le situazioni possono essere di tre tipi:

- <u>situazione a-didattica</u>: in questo caso sono in ballo gli studenti e l'oggetto della conoscenza, non l'insegnante. La situazione suggerisce delle esigenze e gli allievi danno risposte a queste. Non ci sono obblighi didattici e dunque quello che si fa non è legato a stimoli da parte dell'insegnante: sono i casi in cui per esempio al termine di un'attività ludica, si deve effettuare qualche cosa di pertinente alla matematica, per esempio conteggi per stabilire il vincitore, paragone di valori, paragone di misure. Questa attività matematica non è stata richiesta dall'insegnante, ma è un bisogno motivato dall'attività. Se ci sono dei problemi per cui si apre una discussione per concordare modalità, per meglio analizzare il problema, per arrivare ad una soluzione, allora si ha produzione di conoscenza. In una situazione di questo tipo il fine esplicito non è l'apprendimento, ma essa è la più adatta alla costruzione di conoscenza. Un esempio di situazione a-didattica potrebbe essere quella indotta dalla proposizione di una attività del tipo "progettare una gita scolastica" oppure "progettare la festa di fine anno": bisogna calcolare distanze, tempi, costi, ripartizione di spese, confrontare offerte, ecc.
- <u>situazione non-didattica</u>: è una situazione pedagogica non specifica di un

sapere. Ad esempio, i bambini alla presenza dell'insegnante giocano con i pezzi di un gioco matematico. Le strategie realizzate, pur se con strumenti matematici, non sono specifiche per un apprendimento, nel senso che insegnante non ha costruito un ambiente didattico finalizzato all'apprendimento di qualche nozione specifica del sapere da insegnare.

- situazione didattica: l'insegnante prepara l'ambiente in modo opportuno al fine di giungere alla fine dell'attività ad una conoscenza specifica. In questo caso c'è intenzione esplicita di insegnare: l'allievo sa che sta imparando, che l'insegnante sta insegnando, l'insegnante a sua volta è consapevole del suo ruolo.

In una situazione di quest'ultimo tipo è pienamente operante il *contratto didattico*. Per chiarirne il significato, facciamo ancora riferimento a Brousseau:

"in una situazione di insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha come compito di risolvere il problema che viene presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini del maestro attese dall'allievo e i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico."

Spesso queste attese non sono dovute ad accordi espliciti imposti dalla scuola o dagli insegnanti o concordati con gli allievi, ma alla concezione della scuola e della matematica che hanno i soggetti in gioco.

Esempio 1.

L'allievo crede che la scuola ha come scopo principale quello di valutare rendimento e capacità degli allievi, quindi anche se l'insegnante gli chiede di scrivere liberamente quello che pensa intorno ad un argomento matematico, per esempio il concetto di altezza di un triangolo, l'allievo ritiene di doverlo fare con un linguaggio il più possibile "rigoroso", perché suppone che sotto quella richiesta ci sia comunque una prova, un controllo.

Esempio 2.

Lo studente ritiene che in matematica si devono fare dei calcoli, per cui anche se la risposta alla domanda posta in un problema potrebbe essere data solo rispondendo a parole e senza calcoli, lo studente è a disagio e tende a far uso dei dati numerici presenti nel testo del problema per dare comunque una risposta formale.

Esempio 3.

Quando l'insegnante propone un problema alla classe, viene gratificato colui che riesce a dare rapidamente la risposta corretta: quindi bisogna tentare di dare il più presto possibile una risposta, anche provando a indovinare.

C'è da tenere presente che il contratto didattico non è un contratto pedagogico generale ma dipende strettamente dalle conoscenze in gioco.

Infine, ritornando al lato allievo-sapere, c'è da notare che esso è a sua volta fortemente influenzato dalle concezioni dello studente sulla scuola e sui contenuti delle discipline, quindi varia in funzione dell'età, delle esperienze precedenti, della famiglia, dell'ambiente socio culturale in cui vive. Per questo è estremamente importante il ruolo dell'insegnante, che con una corretta trasposizione didattica e con una metodologia didattica appropriata deve fare in modo che l'allievo sia interessato ad apprendere.

Alla trasposizione didattica l'insegnante deve dedicare una grande attenzione: prima di introdurre un nuovo argomento, egli deve fare riferimento

- a conoscenze di modelli matematici e didattici;
- a conoscenze sulle difficoltà che gli allievi incontrano su quell'argomento;
- a conoscenze generali di strumenti per la costruzione di curricoli.

È fondamentale che l'insegnante si chieda quali tipi di competenze vuole che i suoi allievi raggiungano, magari anche in funzione di un successivo proseguimento degli studi: bisogna però tenere presente che nella scuola del primo ciclo gli obiettivi sono centrati sulla formazione del cittadino e sull'acquisizione di competenze di base ed è a queste che bisogna guardare in primo luogo.

Bisogna anche tener presente che la matematica è una disciplina fortemente strutturata; la strutturazione procede sempre sul doppio binario operatività/concettualizzazione, per questo in ogni curricolo di matematica è necessario evidenziare questa “doppia faccia” del sapere matematico. L’aspetto operatorio poi deve sempre precedere il tentativo di costruzione dei concetti. Questo ci aiuta anche a comprendere le difficoltà dei bambini: il bambino “non riesce” in matematica, spesso, perché quello che sta facendo è per lui totalmente privo di senso, al di là delle regole del gioco che cerca di imparare, in quanto non ha dietro nessuna esperienza vera sulla quale appoggiare la nuova idea.

Per costruisce un curricolo di matematica sono possibili scelte molto differenti, anche come denominazione: un tempo si parlava di *programmi,* poi si è parlato di *curricoli,* oggi si parla di *piani di studio personalizzati.* Non è solo una questione linguistica, ma risponde a diversi modi di vedere le cose: l’interesse è sempre più puntato non principalmente sui contenuti ma sul bambino che apprende.

Si chiami programma, curricolo, indicazione, l’oggetto di studio (il sapere da insegnare) non è mai *neutro*, neppure per la matematica: esso ha sempre a monte una particolare idea di bambino, di cittadino, di scuola, di famiglia, di società, ma anche una particolare *visione della matematica*. In effetti ci sono diverse visioni della matematica e della scienza che si scontrano sul terreno filosofico e questo scontro ha anche ricadute sull’insegnamento. L’idealismo italiano ha prodotto nei primi decenni del 1900 la riforma Gentile: l’impostazione crociano- gentiliana della conoscenza nega che la scienza abbia un valore conoscitivo di per sé di conseguenza, l’insegnamento della scienza serve esclusivamente per scopi strumentali. Si nega che l’attività scientifica abbia valore formativo e questo naturalmente condiziona non solo la scelta dei contenuti ma anche la metodologia didattica da adottare: per la matematica questo vuol dire essenzialmente un insegnamento che è “addestramento” per arrivare al possesso di alcune limitate e poco significative competenze.

D’altra parte la concezione della matematica che ha Gentile è efficacemente sintetizzata da questa sua affermazione:

La matematica è un sasso: inerte, morta come una pietra

Questo tipo di concezione è quindi responsabile di una impostazione dell'insegnamento della Matematica che è ancora difficile sradicare e che ha provocato tanti danni, in termini di conoscenze, di autostima, di capacità concrete di affrontare situazioni e di esprimere giudizi, che, insieme con altri fattori, limita le capacità di sviluppo della nostra società.

Naturalmente non esiste un modello di trasposizione didattica che sia valido sempre e ovunque, è fondamentale che l'insegnante tenga presente la realtà della classe nella quale sta operando, il tipo di alunni, la realtà socio culturale in cui vivono, le esperienze di cui sono portatori.

3. I problemi e il problem-solving.

Quando un insegnante si accinge a progettare il suo lavoro, lo fa seguendo una serie di convinzioni, perlopiù implicite, che riguardano, fra l'altro, anche la sua concezione della matematica. Possiamo distinguere quattro diversi tipi di concezioni:

- **concezione descrittiva**: la matematica esiste in un mondo ideale ed è perfettamente costruita. Compito dell'insegnamento è quello di far comprendere definizioni e teoremi in modo che gli allievi li facciano propri. Sul piano pratico, il libro di testo (o gli appunti) sono la fonte da cui attingere (quanti insegnanti di matematica hanno la mania degli appunti da dettare!).
- **concezione costruttiva**: la matematica è qualcosa che si riferisce al processo di costruzione dei concetti, non esistono oggetti matematici al di fuori dal processo che li produce. Nell'insegnamento quindi bisogna promuovere la capacità di costruire concetti, modelli, teorie.
- **concezione formale**: l'attenzione è centrata sulla forma con cui sono espressi i concetti matematici e sulle regole che servono a combinarli tra loro. La matematica è il suo linguaggio, tutto sta allora a saper manipolare formule e pro-

posizioni scritte in modo simbolico.

- concezione sostanziale: quello che interessa è la realtà che sta sotto le formule e i concetti. Nell'insegnamento si mira al significato, al contenuto che è nascosto sotto i simboli.

Esempio: le frazioni.

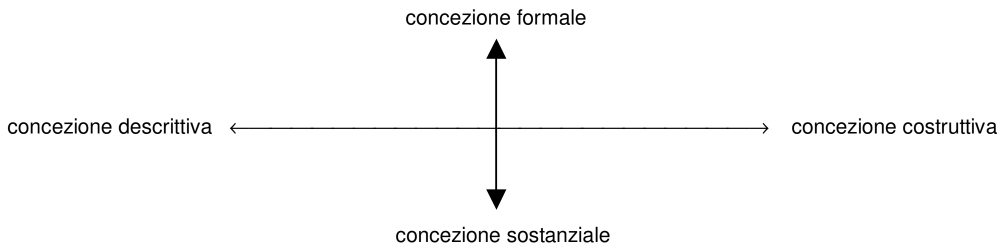
Concezione descrittiva: la frazione è il rapporto di due interi; sull'insieme delle frazioni sono definite delle operazioni, numeratore, denominatore, ecc.

Concezione costruttiva: si fa scaturire il concetto di frazione <u>da un problema</u>, ad esempio di misurazione.

Concezione formale: le frazioni sono numeri, tutti gli insiemi numerici obbediscono ad una idea di struttura più ampia, ecc.

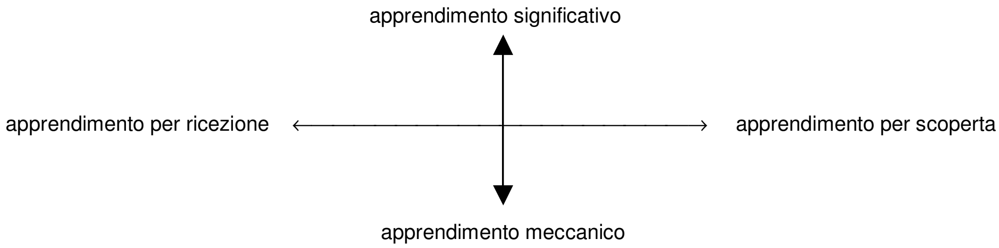
Concezione sostanziale: il concetto di rapporto in tutte le sue sfaccettature, da quello di proporzione a quello di confronto (misura), ecc.

In generale queste concezione interagiscono tra di loro combinandosi in vario modo. Costruito il seguente diagramma



quello che purtroppo è più spesso presente nelle aule scolastiche è un insegnamento che si colloca nel quadrante in alto sinistra. Seguendo invece i ragionamenti che sinora sono stati fatti, il quadrante da utilizzare dovrebbe essere quello in basso a destra. Ciò che più importa non è tanto la riproduzione stereotipata di algoritmi di calcolo, la risoluzione di problemi sempre uguali, di schemi precostituiti, quanto piuttosto l'attività del soggetto che nell'impatto con la realtà sviluppa una capacità di padroneggiare situazioni confuse, problematiche, complesse, incerte, mediante adeguati strumenti che già possiede o che è costretto a costruirsi, con l'aiuto dell'insegnante.

Anche per l'apprendimento è possibile costruire uno schema analogo



- **apprendimento significativo**: il nuovo materiale da apprendere è collegato con ciò che il ragazzo già possiede, viene incorporato in modo logico nella struttura preesistente. Si diventa consapevoli della nuova conoscenza.

- **apprendimento meccanico**: non ci sono connessioni, il solo modo per ricordare è una ripetizione meccanica; non si modifica la struttura conoscitiva interna.

- apprendimento per scoperta: l'apprendimento del nuovo concetto avviene per via autonoma, con sforzo personale, è quasi una scoperta ex-novo.

- apprendimento per ricezione: non c'è autonomia, tutto è legato alla trasmissione culturale.

Se si vuole che sia efficace, l'apprendimento dovrebbe essere di tipo significativo, spesso invece è di tipo meccanico: tutto viene acquisito in modo mnemonico e per questo le nuove conoscenze sono scarsamente collegabili con le vecchie e difficilmente utilizzabili in problemi che non siano di routine.

Un apprendimento significativo può essere realizzato sia per ricezione che per scoperta, ma in ogni caso è necessario un *approccio per problemi*. Un problema provoca un'instabilità, una frattura nelle vecchie conoscenze che non sono più in grado di indicare la strada su cui procedere. Questa presa di coscienza è la molla che spinge al lavoro e alla riflessione per ricomporre la conoscenza, includendo in essa quanto di nuovo è emerso modificando le conoscenze precedenti. In questo modo si ha apprendimento stabile.

Posto di fronte ad un problema che non ha soluzioni, come si comporterà l'allievo? Confortato dall'esperienza del contratto didattico, secondo il quale l'insegnante non ha come scopo di ingannare l'allievo, anche quando sa di avere scoperto una frode in una domanda del maestro, difficilmente denuncerà la rottura del patto in nome della logica del problema, non assumerà su di sé la responsabilità della rottura del contratto, ma darà in ogni caso una risposta, costi quel che costi, anche se capisce che c'è qualcosa di strano.

Un esempio classico è il cosiddetto "Problema del capitano", che ha una struttura di questo tipo:

Una nave trasporta animali. In un viaggio verso la Sardegna ci sono 8 pecore e 5 cavalli. Quanti anni ha il capitano?"

In tutte le classi in cui il problema è stato proposto (in versioni simili a questa) e nelle quali era adottato un metodo di insegnamento tradizionale, si è sempre riscontrata una elevatissima percentuale di bambini che, al di là di ogni considerazione, si sentono in dovere di dare una risposta: l'operazione da fare non può che essere una moltiplicazione, l'unica che dia un risultato (40) accettabile!

Tutto ciò nasce anche da una particolare idea di problema come qualcosa di artificioso, prefabbricato, con caratteristiche già tutte codificate. Essendo i problemi uno dei temi principali sia nei programmi della scuola primaria che in quelli della secondaria inferiore, si affronterà ora questo tema.

Nel primo paragrafo si sono messe in evidenza le finalità dell'insegnamento-apprendimento della matematica nella scuola del primo ciclo.

Da quelle considerazioni si deducono una serie di conseguenze, che possono essere schematizzate come segue:

- scopo dell'educazione matematica è contribuire alla formazione del pensiero: la matematica è un aspetto della conoscenza e dunque l'insegnamento della matematica non è da considerare a sé stante, ma è da vedere all'interno di un processo globale di crescita;

- parlando di "educazione matematica" non ci si può limitare a quegli aspetti che coinvolgono l'astrazione o la capacità di calcolare; capacità quali intuizione ed immaginazione hanno dignità pari alle altre sul piano educativo anche in questa disciplina;
- tema centrale della matematica è la realtà, con i suoi fatti e fenomeni, e scopo del lavoro matematico è interpretarla criticamente ed intervenire consapevolmente su di essa; è innegabile che si parli di un compito a cui è chiamato ogni essere umano;
- le capacità matematiche da considerare essenziali a questo compito sono quelle di ordinare, quantificare e misurare; anche queste tuttavia non possono essere apprese come fini a loro stesse, ma come conseguenze di concetti, metodi ed atteggiamenti: a questi ultimi si dovrà soprattutto dedicare spazio ed energie.

Da queste brevi indicazioni si deduce come sia pedagogicamente assurdo ed infruttuoso dedicarsi ad apprendimenti meccanici di formule o insistere su ripetizioni di esercizi identici, scollegati da situazioni concrete, che sono invece quelle che fanno crescere in generale la conoscenza sul piano matematico.

Un'altra affermazione dei Programmi della Scuola Elementare del 1985 indica la direzione operativa da seguire:

"Il pensiero matematico è caratterizzato dalla attività di risoluzione dei problemi e ciò è in sintonia con la propensione del fanciullo a porre domande e a cercare risposte.

Di conseguenza le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete che scaturiscano da esperienze reali del fanciullo e che offrano anche l'opportunità di accertare quali apprendimenti matematici egli ha in precedenza realizzato, quali strumenti e strategie utilizza e *quali sono le difficoltà che incontra.*

Occorre evitare, peraltro, di procedere in modo episodico e non ordinato e tendere invece ad una progressiva organizzazione delle conoscenze"

Anche i Programmi della Scuola Media del 1979 affermano che l'attività matematica della classe sarà fondata su *"problemi tratti da situazioni concrete"* e che *"verrà dato ampio spazio all'attività di matematizzazione intesa come interpretazione della realtà nei suoi vari aspetti (naturali, tecnologici, economici, linguistici...)".*

Da queste affermazioni si possono trarre schematicamente alcune conseguenze:

- ogni bambino (ogni essere umano, in realtà) si pone dei problemi e cerca di risolverli: compito dell'insegnante sarà mettere questa capacità al servizio della crescita delle abilità matematiche;
- quello di partire dalla soluzione di problemi innestati in esperienze vissute dai bambini, per arrivare ad appropriarsi dei concetti matematici è un approccio più vicino alle caratteristiche di apprendimento dei bambini in questa fascia di età;
- davanti ad un problema ogni bambino reagisce come facciamo noi adulti, anche se ad un livello di conoscenza diverso, e cioè facendo ricorso a tutte le proprie doti ed abilità per superare le difficoltà poste da una questione in cui si sente coinvolto: in questo caso le eventuali difficoltà di apprendimento non sono più un ostacolo, ma una "condizione" dell'esistenza;
- l'approccio per problemi, soprattutto quando nasce da situazioni concrete, è motivante per i bambini e mobilita capacità, stimola l'attenzione e l'uso delle competenze precedentemente acquisite, la richiesta di collaborazione in una situazione anche emotivamente coinvolgente, costruisce un'occasione di ricerca personale dove trova spazio l'intuizione;

- attraverso la risoluzione dei problemi, l'insegnante ha la possibilità di conoscere il livello di apprendimento di ogni singolo bambino e quindi di individuare gli obiettivi a lui adatti;
- nella risoluzione dei problemi assume il suo pieno significato l'apprendimento per prove ed errori, che diventa stimolo alla collaborazione e alla socializzazione dei bambini

In questo quadro risolvere un problema non significa mai semplicemente eseguire una sequenza di operazioni. La risoluzione di un problema, anche del più semplice, coinvolge sempre un procedimento complesso.

Consideriamo il seguente esempio (può scaturire da una attività di progettazione di un viaggio):

"150 alunni di una scuola devono fare una gita accompagnati da 10 insegnanti. La ditta di trasporti incaricata offre autobus di 48 posti ciascuno. Quanti autobus sono necessari?"

Per rispondere correttamente, non basta aver capito che la "traduzione matematica" corretta consiste in una divisione (160 : 48) e nemmeno nella esecuzione corretta di quest'ultima (160 : 48 = 3 con resto 26, oppure = 3,541...), che fornisce una "risposta matematica", ma non la soluzione del quesito (non esistono 3,541 autobus; oppure cosa ne facciamo dei 26 passeggeri che avanzano?). La soluzione viene dall'aver compreso che è necessario un arrotondamento per eccesso della soluzione matematica, in modo da prenotare i 4 autobus necessari.

Un problema infine, se correttamente risolto, apre la strada a considerazioni ed applicazioni più generali; opportunamente razionalizzato, esso consente di costruire regole generali, che serviranno alla soluzione di altri problemi simili. L'interpretazione del risultato ottenuto, cioè, non si può limitare a fornire il formalismo necessario per la risoluzione del problema già formulato in termini matematici.

Può darsi che tale generalizzazione non sia sempre alla portata di tutti gli alunni: si dovranno per questo rispettare le caratteristiche di ogni alunno, tenendo conto dei suoi limiti e delle sue potenzialità. Tuttavia ogni insegnante dovrebbe avere presente questo aspetto, per stimolare negli alunni le capacità di astrazione.

A questo punto è indispensabile chiarire che cosa sia un insegnamento per problemi (possiamo tradurre schematicamente in questo modo l'espressione inglese problem-solving). Si potrebbe per prima cosa fare una distinzione tra *problema* ed *esercizio*: esercizio rappresenta una situazione in cui il solutore possiede già tutte le conoscenze che sono necessarie per trovare la giusta soluzione. Molti di quelli che sono chiamati problemi sono in effetti degli esercizi, la (quasi) totalità dei problemi scolastici lo è. Questo tipo di "problemi" sono utilizzati dall'insegnante per consolidare concetti che gli alunni dovrebbero già aver appreso.

Bisogna invece intendere la parola "problema" in un senso più ampio: si tratta di una situazione in cui si presentano delle difficoltà, nella quale non sappiamo in partenza neppure se abbiamo tutte le conoscenze che occorrono per superare tali difficoltà. Di fronte a questo tipo di problema, bisogna spesso prendere atto della inadeguatezza del nostro sistema di conoscenze e fare qualche passo in avanti scoprendo la necessità di inventare quello che per noi è un nuovo concetto, una nuova procedura da incorporare nel nostro sistema di conoscenze e che ci consenta di superare la difficoltà. Si capisce come in situazioni di questo tipo sia essenziale fare ricorso all'intuizione, alla creatività del singolo, ma anche quanto sia importante il ruolo dell'insegnante che stimola la riflessione e guida verso gli aspetti significativi del problema. Quando si parla di insegnamento per problemi ci si riferisce ad una tecnica didattica che ha come obiettivo quello di far scaturire la necessità di introdurre un nuovo concetto, una nuova schematizzazione, una nuova tecnica dalle necessità connesse alla soluzione di un problema, di una situazione di difficoltà. In questo modo l'alunno è guidato dall'insegnante quasi ad una riscoperta della matematica e delle sue regole, come se fosse lui a scriverle per la prima volta: l'alunno (ri)costruisce in questo modo le conoscenze matematiche e queste diventano per lui ricche di significato, interconnesse con il suo sistema di conoscenze e quindi molto più stabili.

Questo modo di procedere richiede molto impegno da parte dell'insegnante ma è il modo migliore per raggiungere gli obiettivi che sono stati messi in evidenza nel primo paragrafo. Di fronte ad un nuovo argomento da introdurre, l'insegnante fa riferimento ad una situazione in cui l'alunno riesce a dare un senso a quella nuova conoscenza: anche l'insegnante deve fare lo sforzo di ritrovare le sorgenti delle sue conoscenze. Numerosi esempi di situazioni problematiche saranno presentati nei capitoli seguenti.

4. I concetti e gli ostacoli.

Il significato della parola "concetto" è quanto mai complesso e le considerazioni su di essa si perdono nella notte dei tempi. Tralasciando gli aspetti filosofici, per chi si occupa di didattica è interessante sapere quello che pensano psicologi e pedagogisti sulle modalità di formazione dei concetti. Vygotskij [1966] ad esempio parla di sviluppo concettuale distinto in varie fasi. Per prima viene la fase dei *gruppi sincretici,* il bambino pensa *"per mucchi"* : la parola "mucchio" ha una funzione indicativa ed è riferita ad un insieme di oggetti collegati fra loro *per caso* nella percezione del bambino, facendo riferimento ad una contiguità spaziale o temporale. Viene poi la fase del *pensiero per complessi,* in cui il bambino riconosce nessi concreti, ma non quelli logici ed astratti: poiché un complesso non è logico astratto, i legami che lo creano, come pure quelli che esso contribuisce a creare, mancano di unità logica. Gli oggetti che formano un complesso hanno tra loro un legame concreto: in questa fase il bambino comincia a fare associazioni e a individuare collezioni tramite forma, colore o altre caratteristiche fisiche. Per esempio, se deve raccogliere quadrati rossi, lo fa non perché sa che cosa è un quadrato, ma solo per le somiglianze fisiche tra i vari oggetti.

Successivamente i bambini diventano sempre più capaci di mantenere fissi i criteri dei loro raggruppamenti, delle loro generalizzazioni, e così arriva infine la fase *concettuale,* in cui si utilizza la capacità di astrazione. Il concetto emerge, secondo Vygotskij, quando la totalità delle caratteristiche concrete, vengono astratte e poi sintetizzate di nuovo. Tale sintesi astratta diventa allora lo strumento principale di pensiero.

Un ruolo fondamentale è svolto dal linguaggio: esso è il mediatore tra individuo e cultura e tra individuo e società: la formazione dei concetti avviene con un'operazione intellettuale che è guidata dall'uso delle parole che servono per concentrare attivamente l'attenzione, astrarre certe idee, sintetizzandole per mezzo di un nome o di un segno. Lo sviluppo intellettuale è fortemente influenzato oltrechè dall'evoluzione biologica, anche dal processo dello sviluppo storico, mediante il quale l'uomo si è evoluto culturalmente.

Il bambino apprende concetti nel rapporto linguistico con l'adulto, ma forme embrionali di concetti sono già presenti nella sua mente anche prima. Vygotskij distingue tra concetti spontanei e concetti scientifici: i primi nascono dalla riflessione sull'esperienza quotidiana, i secondi sono assemblati insieme ad altri e fanno parte di un sistema, essi hanno origine nell'attività strutturata che si svolge a scuola.

I *complessi* vengono chiamati anche schemi e coincidono con i concetti spontanei o quotidiani. Schemi e concetti interagiscono tra loro, collegando esperienza concreta ed astrazione, nel senso che i concetti organizzano dall'alto l'esperienza mentre l'esperienza, partendo dal basso, riempie di contenuto i concetti per mezzo degli schemi.

Apprendere vuol dire formarsi concetti e riuscire a lavorare con essi, soprattutto cogliere le relazioni che tra essi si possono stabilire. All'acquisizione dei concetti si sovrappongono però numerosi ostacoli.

Possiamo distinguere tre diversi tipi di ostacoli:

- di natura ontogenetica,
- di natura didattica,

- di natura epistemologica.

Il primo tipo di ostacoli si riferisce alle difficoltà che possono essere legate allo sviluppo dell'individuo e ad eventuali handicap che potrebbe avere, ma anche a difficoltà legate allo sviluppo dell'intelligenza.

Gli ostacoli di natura didattica sono invece legati al particolare progetto che l'insegnante o l'istituzione scolastica predispone per una certa fascia di scolarità. L'esempio più lampante è legato alla introduzione dei numeri con la virgola, previsto nei programmi della scuola elementare: il bambino si trova in un momento molto delicato in cui sta completamente assimilando le idee legate alla struttura dei numeri interi ed egli finisce per sistemare anche i razionali all'interno di questa struttura.

Gli ostacoli di natura epistemologica sono invece legati alla natura stessa dell'argomento: essi nascono da difficoltà insite nello stesso concetto o nelle relazioni tra concetti diversi. Un ostacolo epistemologico è una conoscenza che produce risposte adatte in un certo contesto ma false in un altro contesto. Questa conoscenza resiste alle contraddizioni alle quali è sottoposta: è indispensabile identificare l'errore e incorporare il suo rifiuto nel nuovo sapere. Possiamo avere esempi di questo tipo di ostacoli se ripercorriamo la storia dello sviluppo della matematica e ricerchiamo quelle idee che hanno avuto bisogno, per affermarsi, di una frattura con concezioni precedenti. Alcuni esempi molto significativi sono le difficoltà insite nel concetto di zero, nel simbolismo algebrico, nella nozione di infinito.

Bibliografia essenziale

D'Amore B. [2000] - *Elementi di didattica della matematica* – Pitagora ed.

Bolondi G. [2004]- La matematica nella scuola di base – Pitagora

Brousseau G. [1986] – *Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques* - Recherches en didactique des mathématiques – 7,2,33-115

Vygotskij L.S. [1966] – *Pensiero e linguaggio* – Giunti&Barbera